A Matemática Árabe dos Séculos IX ao XIV

F. Miraglia

Conferência no Intituto Cervantes

Parte das atividades da Exposição

Passeo Matemático por al-Ândaluz

26 de maio de 2023

A contribuição dos árabes da Idade Média para a Matemática e a Astronomia é vasta.

Inclui, só para citar alguns tópicos, avanços na geometria, na trigonometria plana e esférica, na teoria dos números, na determinação de áreas e volumes, na introdução da Álgebra e de algoritmos, na Astronomia (com a análise crítica de Ptolomeu) e na construção de instrumentos de medida, em particular, o refinamento do quadrante, do sextante e a construção de astrolábios.

Foram mestres em assimilar os saberes já conhecidos, simplificá-los, integrá-los e desenvolver pesquisas sofisticadas a partir do já descoberto.

Essa perspectiva integradora e crítica é uma de suas contribuições mais importantes ao trabalho intelectual.

Dado o volume de material, para uma apresentação como a de hoje será necessário escolher.

Espero que as minhas escolhas possam dar uma boa ideia dessas contribuições, que foram fundamentais para o desenvolvimento da Matemática e da Astronomia.

O início desse desenvolvimento se deu na Casa do Saber em Bagdá (8AD).

Importante frisar que nessa Casa estudiosos de diversas especialidades se reuniam para produzir saber, frequentemente de forma interdisciplinar.

Vamos então ao que nos interessa hoje.

Apresentarei definições e fundamentos conforme o necessário.

Algumas Traduções importantes

- Euclides (4BC) : "Os Elementos", "Data", "Óptica", "Phaenomena" e "Sobre a Divisão";
- Arquimedes (3BC): "Esfera e Cilindro" e "Medida do Círculo";
- Obras de Apolonius (2-3BC), Diophantus (3BC; "Aritmética") e Menelaus (1-2AD; "Sphaerica");
- O "Almagest" ("Tratado de Matemática") de Ptolomeu (1AD) ;
- Textos hindus, em especial de Aryabhata (5AD) e Brahmagupta (7AD).

Importante: essas traduções eram feitas por cientistas e matemáticos e faziam parte do esforço de pesquisa da época.

Conjuntos de Números

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ..., n, ...\}$ é o conjunto dos **números naturais**; (comment)

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm n, ...\}$ é o conjunto dos **números inteiros**; (n é um natural).

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}, q \neq 0\}$ é o conjunto dos **números racionais** (as frações)

Provocação : não dividimos por 0.

$\mathbb{R}$ é o conjunto dos **números reais ou reta real**.

Não há tempo de discutir "quem é" $\mathbb{R}$. (comment)

Consideramos, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, ou seja os naturais são parte dos inteiros, que estão incluídos nos racionais, que por sua vez está dentro dos reais.

Porém, há muitos (mesmo) reais que não são racionais: $\sqrt{2}$, $\sqrt{12}, \sqrt[3]{5}$, π, etc.

Provocação : $\sqrt{-3}$ não é um número real!

Todos esses números satisfazem uma lei importante:

A lei do cancelamento:

$$ab = ac \text{ e } a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad b = c.$$

Sistemas Numéricos

Al-Khwarizmi (diretor da Casa do Saber em 9AD e de origem persa) é um dos mais importantes matemáticos árabes desse período. Suas principais contribuições foram a defesa do sistema Hindu de numeração e a criação da Álgebra (ver abaixo).

O sistema Hindu era baseado nos algarismos 0, 1 – 9. Adotaram o sistema decimal dos Hindus e passaram a empregar a notação usada até hoje.

Al-Kindi (9AD, uma figura ilustre), Al-Uqlidsi e Al-Baghdadi (10AD) contribuiram para a adoção e o aprimoramento do sistema decimal.

Passaram a empregar decimais no lugar de frações (e.g., 0,75 em vez de $3/4$). Na base 10, temos :

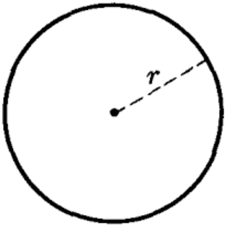
$302{,}615 =$

$$= \underline{3} \cdot 10^2 + \underline{0} \cdot 10 + \underline{2} \cdot 10^0 \mathbf{+} \underline{6} \cdot \frac{1}{10} + \underline{1} \cdot \frac{1}{100} + \underline{5} \cdot \frac{1}{1000}$$

com vírgula servindo para separar as potências positivas (ou nulas) de 10 das negativas.

Esse sistema de numeração, empregado até hoje, impulsionou um enorme avanço nos métodos numéricos empregados pelos árabes (e por nós também!). Por exemplo, permitiu a extração de raízes de números (Abu al-Wafa e Omar Khayyam).

O Círculo de raio r



- Área de um círculo de raio $r = \pi r^2$
- Comprimento da circumferência de raio $c = 2\pi r$.

Esses resultados foram obtidos por Arquimedes pelo "método da exaustão".

Esse método foi refinado por Ibrahim ibn Sinan e al-Quhi (10AD), que generalizaram resultados de Arquimedes e Pappus de Alexandria acerca de áreas laterais e volumes de sólidos no espaço.

Com esses refinamentos, Al-Kashi (14AD) calculou o valor de 2π com 16 casas decimais:

$$2\pi = 6{,}2831853071795865,$$

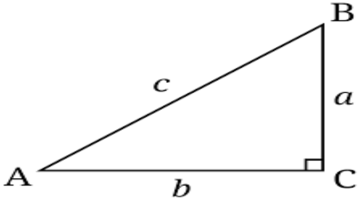
a melhor aproximação de π até meados do século XVIII.

O método da exaustão e a “análise infinitesimal”, aprimorados por esses matemáticos árabes, são a base das modernas teorias de integração :

Riemann, Lebesque, Bochner, Pettis.

As duas últimas também valem para funções definidas em espaços de medida com valores em espaços de dimensão infinita (pois é, essas coisas “existem”!).

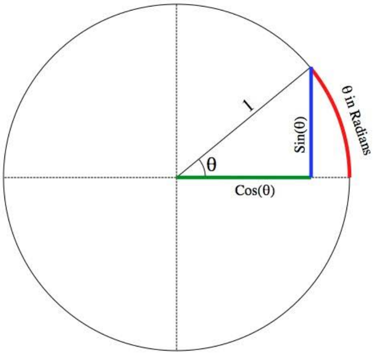
O Teorema de Pythagoras



Em um triângulo retângulo, como acima, temos

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Trigonometria



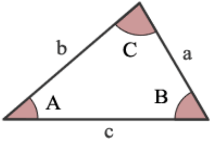
Temos a relação fundamental (pelo Teorema de Pythagoras):
$sen^2\ \theta + cos^2\ \theta = 1$.

• O comprimento da corda em vermelho é o âgulo θ em **radianos**. **Conversão de graus em radianos:**

$$\theta \text{ em radianos} = \pi \cdot \frac{\theta \text{ em graus}}{180}.$$

Exemplos: $45^0 = \frac{\pi}{4}$; $90^0 = \frac{\pi}{2}$; $180^0 = \pi$; $360^0 = 2\pi$.

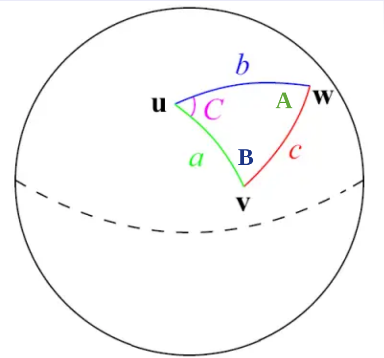
A Lei dos Senos



Estabelecida por al-Tusi (13AD), um dos primeiros a tratar a trigonometria como uma disciplina matemática em si.

Em um triângulo, vale **a lei dos senos**:

$$\frac{sen\,A}{a} = \frac{sen\,B}{b} = \frac{sen\,C}{c}$$



A lei dos senos também vale em geometria esférica! (10AD, Abu al-Wafa e Abu Nasr Mansur)

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c}$$

Abu al-Wafa (10AD) merece reconhecimento especial:

• Trabalhou no observatório em Bagdá, onde construiu o primeiro quadrante de parede para observarções astronômica;

• Obteve observações bem precisas da Lua e planetas conhecidos:

• Construiu tabelas de seno e coseno com precisão de oito casas decimais (as de Ptolomeu continham menos valores e com precisão de três casas decimais).

Uma das motivações desses avanços teóricos era o estudo da astronomia, da geografia, a contagem de tempo e a determinação da hora em diversos locais. Por exemplo:

• Os já mencionados Abul al-Wafa e Abu Nasr Mansur aplicaram geometria e trigonometria esférica para calcular longitudes e latitudes de cidades;

• Al-Biruni (10AD) desenvolveu extensos estudos acerca da projeção de um hemisfério em um plano, descobrindo a projeção estereográfica para construir mapas de surpreendente precisão. Escreveu um importante trabalho sobre o astrolábio, nosso próximo tema.

O Astrolábio

Estabelecidas as bases teóricas, era importante construir instrumentos de medida adequados. Destaca-se o

astrolábio,

cuja teoria matemática basea-se na projeção estereográfica de Al-Biruni. A obra-prima desse instrumento deve-se à Ibn ash-Shatir (14AD).

Álgebra e Algoritmos

Algoritmos

Al-Khwarizmi e seus colaboradores perceberam que o sistema hindu de numeração não era apenas uma forma de dar **nome** aos números, mas que a própria notação era **operacional**, i.e., podia-se operar com ela.

Alguém conseque multiplicar 14 por 17 com algarismos romanos?

De forma simples, um **algoritmo** é uma **sequência finita** de instruções para resolver uma classe de problemas ou fazer um cálculo.

Com o sistema de numeração árabe-hindu, surgiram:

• Os algoritmos de soma, multiplicação e divisão de números que usamos até hoje;

• Algoritmos para extração de raízes quadradas, cúbicas (Omar Khayyam (11AD), entre outros)...;

• O uso correto do astrolábio envolvia um algoritmo. O mesmo é verdade para os instrumentos de medida inventados pelos árabes;

• Para esses slides: foi escrito um **programa**, que compilado por Latex produziu o pdf que está sendo apresentado (um algoritmo meio complexo).

Um definição matemática de “algoritmo” ou de **função efetivamente calculável** permanece sendo uma questão sem solução definitiva.

Há várias propostas; mencionamos (todas da mesma época (anos 30)):

- As funções **recursivas**, propostas por Gödel, Herbrand e Kleene;

- O λ-Cálculo de Alonzo Church;

- As máquinas de Turing, uma tentativa de definição matemática de cálculo mecânico, devida ao matemático inglês Alan Turing (foi doutorando de Church em Princeton).

Pode-se provar que essas abordagens são essencialmente equivalentes.

As ideias de Turing geraram um avanço significativo no que hoje chamamos de Ciência da Computação e em abordagens de "Inteligência Artificial".

As outras teorias mencionadas acima permanecem centrais em Matemática.

Álgebra

Inventada por Al-Khwarismi (9AD), teve e tem um impacto profundo no desenvolvimento da Matemática, criando uma linguagem abstrata, que empregamos até hoje.

A ideia é tão boa, que merece iniciarmos com alguns exemplos concretos.

• Achar um número que multiplicado por 2 é igual a 17.

Como não sabemos que é esse número, introduzimos um **"nome"** para o que desejamos descobrir e escrevemos

$$2x = 17.$$

Agora podemos operar com essa igualdade para obter $x = 8{,}5$.

• Achar números tal que o primeiro multiplicado por 2 somado com o triplo do segundo é igual a 17.

De novo, empregaremos o revolucionário método de dar "nomes" ao que desejamos descobrir. Importante: não confundir o primeiro com o segundo, pois podem ser distintos! Então escrevemos:

$$2x + 3y = 17 \tag{I}$$

É fácil ver que $x = 1$ e $y = 5$ satisfazem (I). Na realidade, a equação (I) possui uma infinidade de soluções.

Podemos escrever fórmulas mais complexas, enunciando problemas que seriam complicados de expressar sem o revolucionário simbolismo apresentado. Por exemplo,

$$\sqrt{7}\, x^2 + 4y = 5z^3 + 12.$$

Al-Khwarismi e seus sucessores desenvolveram aplicações da álgebra à aritmética, à teoria dos números, à geometria (antecipando Descartes e Fermat). Surgiram a álgebra polinomial, a análise combinatória e a solução por métodos númericos de equações, entre outros avanços.

Algumas contribuições de Al-Khwarismi e seus sucessores:

1. Al-Khwarismi inventou o método de "completar quadrados" para achar raízes de equações de segundo grau, que ainda empregamos, inclusive em vários outros contextos. Suas provas eram geométricas, usando resultados do Livro II de Euclides.

Os árabes dessa época não sabiam como tratar ou interpretar raízes "imaginárias" de polinômios, que eram abandonadas. Mas sabiam muito bem que eram "inevitáveis". Por exemplo, as raízes de $x^2 + x + 1 = 0$ são $\dfrac{1 \pm \sqrt{-5}}{2}$. Porém, como entender o que vem a ser $\sqrt{-5}$?

2. Abu Kamil (9AD) descobriu a lei fundamental da exponenciação $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$, onde n e m são inteiros e a é positivo. Essa lei foi generalizada por Al-Karaji para expoentes com números inteiros, inclusive para variáveis (1/x, $1/x^2$, etc.)

3. Al- Karaji (10AD) é o primeiro a livrar a Álgebra de argumentos geométricos, substuindo-os por operações aritméticas, centrais na Álgebra até hoje. Entre suas descobertas, destacamos, além das leis gerais da exponenciação já mencionadas:

• A fórmula para $(a+b)^n$ (binômio de Newton) e o triângulo de Pascal (que deveriam levar o nome de Al-Karaji...);

• As fórmulas para a soma das potências dos n primeiros números naturais: $1 + 2^k + 3^k + \cdots + n^k$. Exemplos:

$$\begin{aligned} \text{a) } 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \\ \text{b) } 1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 &= (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

• Foi o primeiro a conceber e utilizar o método de prova por **indução matemática**.

Haveria tanto mais o que descrever e comentar...

As descobertas e inovações árabes, sua perspectiva integradora e de pensamento crítico foram **fundamentais** para o desenvolvimento da Matemática. E suas contribuições permanecem sendo um campo ativo de pesquisa.

Muitas das que conhecemos foram passadas à Europa através de traduções. Destaco aqui a contribuição de Leonardo Fibonnaci (Piza, 12AD, também um matemático de renome) na disseminação do saber matemático árabe.

Espero ter passado aos presentes uma ideia da imensa dívida que temos com os cientistas árabes dos séculos IX ao XIV!

Além de **algumas referências** :

1. As leis da exponenciação, devidas a Abu Kamil (9AD) e a Al-Karaji (10AD);

2. Gráficos e alguns valores de seno e coseno.

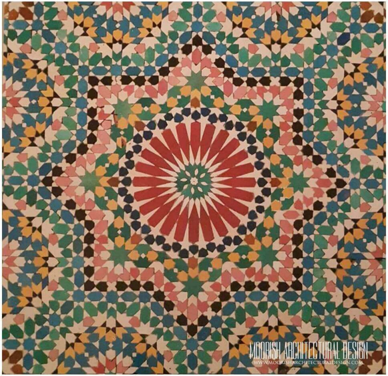
3. A lei dos cosenos, devida a Al-Kashi (14AD).

4. Superfícies de curvatura positiva e a teoria da relatividade geral de Einstein.

5. Por que não dividimos por 0 ?

6. Por que $\sqrt{-3}$ não é um número real ?

7. A proporção áurea.



Muito obrigado pela sua atenção e presença!

Referências

• J.L.Berggren, *History of Mathematics in the Islamic World: The Present State of the Art*, Middle East Studies Association Bulletin **19**, pp. 9-33, 1985.

• J.L. Berggren, **Episodes in the mathematics of Medieval Islam**, Springer, 1986.

• J.L. Berggren, *Mathematics and Her Sisters in Medieval Islam: A Selective Review of Work Done from 1985 to 1995*, Historia Mathematica **24**, pp. 407-40, 1997.

• M. Cantor, **Vorlesungen uber Geschichte der Mathematik**, 4 vols. Leipzig, 1900-08.

• A. Al-Daffa, **The Muslim Contribution to Mathematics**, Croom Helm, London, 1977.

• P. M. Holt & *alia*, **The Cambridge History of Islam**, edt. P.M. Holt, A.K.S. Lambton, and B. Lewis, Cambridge University Press, 1970.

• R. Lorch, **Arabic Mathematical Science**, Variorum, Aldershot, 1995.

• E. A. Myers, **Arabic Thought and the Western world**, Frederick Ungar Publishing, New York, 1964.

• T. K. Puttaswamy, **Mathematical Achievements of Pre-modern Indian Mathematicians**, Elsevier, 2012.

• R. Rashed, **Les mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècles**. 2 vols, Al-Furqan, London, 1993-96.

• A.I. Sabra, *Sciences* in **Dictionary of Middle Ages**, J.R. Strayer Editor in Chief; Charles Scribner's Sons; New York, 1986.

• G. Sarton, **Introduction t the History of Science**, vol.1 (*From Homer to Omar Khayyam*), Krieger Publ. Co., 1927.

• S.P. Scott, **History of the Moorish in Europe**, 3 vols. Bloombsbury, 2021.

• A. Youschkevitch, **Les mathématiques arabes (VIIe-XVe siècles)**, Paris, J. Vrin, 1976.

• S. Zeki, **A History of Arabic Mathematics**, 2 Vols, Istanbul, 1929.

Material Adicional

Exponenciação

Se a é um número positivo (poderia ser $\sqrt{2}$) e n é um natural, a^n é o produto de a por si mesmo n vezes; a é a **base** e n o **expoente**.

Exemplos : $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$; $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ e assim por diante.

Estendendo a álgebra de al-Khwarizmi (9AD), Abu Kamil (9AD) descobriu (sem usar símbolos) uma lei muito importante:

$$a^{n+m} = a^n \cdot a^m \qquad \text{(aqui } n, m \text{ são naturais} \neq 0)$$

Por exemplo, $a^{12} = a^{8+4} = a^8 \cdot a^4$.

No entanto ele não tratou do caso do expoente 0; quanto deveria ser a^0?

A lei é tão bela que desejamos preservá-la e estendê-la; se valesse para todos os naturais, então

$$a^n = a^{n+0} = a^n \cdot a^0.$$

Como $a^n \neq 0$, podemos cancelá-lo, obtendo $a^0 = 1$.

Definimos: $\boldsymbol{a^0 = 1}$**.** Agora a bela lei descoberta por Abu Kamil vale para **todos os naturais**.

Em particular, $\mathbf{10^0 = 1!}$

Al-Karaji (10AD) aprimorou essa ideia, introduzindo e estudando as **potências positivas e negativas de números e variáveis, preservando a lei fundamental descoberta por Abu Kamil**.

Se $n \in \mathbb{N}$, então

$$\boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}.$$

Exemplo 1: $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$;

Exemplo 2: $10^{-1} = \frac{1}{10}$; $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$, etc.

Assim, para **todos** os inteiros n, m, temos

$$\boldsymbol{a^{n+m} = a^n \cdot a^m}.$$

Na realidade, a lei $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$ vale para **todos os racionais** r, s (e até mesmo se r e s são reais).

Temos:

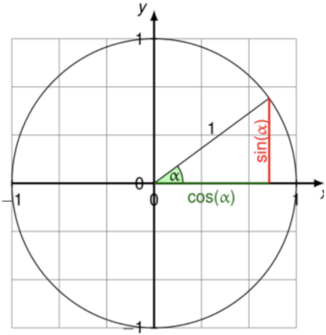
- $a^{1/2} = \sqrt{a}$; $a^{1/3} = \sqrt[3]{a}$ e assim por diante.

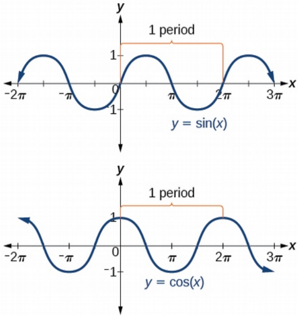
Assim, $a^{2/3} = (\sqrt[3]{a})^2$.

Em geral,

- $a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$.

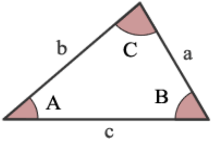
Gráficos e alguns valores de seno e coseno





ângulo	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
seno	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1
coseno	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0

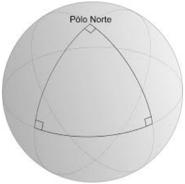
A Lei dos Cosenos



Estabelecida por al-Kashi (14AD). Em um triângulo, vale **a lei dos cosenos**, uma generalização do Teorema de Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab(\cos C)$$

De fato, se o ângulo $C = 90^0$ (ou $\frac{\pi}{2}$ radianos), então $\cos C = 0$ e obtemos o Teorema de Pythagoras. Claro que lei análoga vale para qualquer lado do triângulo e seu ângulo oposto.



A geometria da superfície da esfera é distinta da geometria euclideana. A figura mostra um triângulo **triretângulo** nesta superfície, i.e., a soma dos ângulos internos é 270^0 (> 180) .

Trata-se de uma superfície de curvatura positiva (no caso, o raio da esfera).

A teoria da relatividade geral de Einstein nos informa que, na presença de massa, o espaço se curva. Se a massa é “pequena”, essa curvatura é insignificante e aplica-se a geometria euclideana. Porém se a massa é grande, como no caso do sol (por exemplo), a curvatura torna-se significativa. **E essa curvatura é positiva !**

Como a luz viaja através do espaço, sua trajetória deve acompanhar a curvatura do espaço. Assim, podemos observar estrelas que, em linha reta, deveriam estar atrás do sol. Essas observações são conduzidas durante eclipses do sol.

De forma alguma estou conjecturando que os árabes anteciparam a teoria da relatividade geral de Einstein.

No entanto é interessante observar que concentraram seus esforços em entender superfícies de curvatura positiva...

Por que não dividimos por zero?

Dados números a, b, queremos que haja um **único** **c** tal que $a = bc$. Esse único c é o resultado do quociente de a por b, indicado por $\frac{a}{b}$.

• Se $b = 0$ e $a \neq 0$, $\frac{a}{b}$ não tem solução: qualquer número multiplicado por 0 é 0;

• Se $a = b = 0$, então **qualquer** número satisfaz $a = bc$ e perdemos a **unicidade** do quociente!

Como a **existência e unicidade de** $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$ são propriedades importantes, não permitimos denominadores iguais a 0 (ao contrário do que pensava Brahmagupta). Simples...

Por que $\sqrt{-3}$ não é um número real?

Simplesmente porque não existe um real cujo quadrado seja -3! Se a é um número real, então

$$a^2 \geq 0 \quad \text{e} \quad a^2 = 0 \text{ se e somente se } a = 0.$$

Gauss (18AD) introduziu os **números complexos** para que todos os reais possuíssem raízes quadradas. A solução de Gauss foi mais longe: nos complexos todo número real possui radicais de qualquer ordem.

Os árabes do período aqui considerado conheciam essa difícil questão, mas não chegaram a formular algo concreto.

A proporção áurea

Sejam $0 < a < b$ números reais. Dizemos que a e b estão na **proporção áurea** se satisfizerem a seguinte relação

$$\frac{b}{a} = \frac{a + b}{b}.$$

Essa igualdade é equivalente a

(I) $b^2 = a^2 + ab$, ou seja, $b^2 - ab - a^2 = 0$.

Se dividirmos a última equação em (I) por a^2, obtemos

$$(\text{II})\ \frac{b^2}{a^2} - \frac{b}{a} - 1 = 0.$$

$$\text{(II)}\ \frac{b^2}{a^2} - \frac{b}{a} - 1 = 0.$$

A incógnita é $x = \dfrac{b}{a}$ e portanto (II) se transforma em

$$\text{(III)} \qquad x^2 - x - 1 = 0,$$

ou seja, x é a raiz positiva de (III).

Os árabes nos ensinaram a determinar a raiz de equações quadráticas, que aprendemos nas disciplinas elementares do Ensino Fundamental:

As raízes de $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ são

$$r = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

Empregando esse algoritmo e tomando a raiz positiva de $x^2 - x - 1 = 0$, obtemos a **razão áurea:**

$$\boldsymbol{\frac{b}{a} = x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}}.$$

$\sqrt{5}$ é um número irracional e uma aproximação da razão áurea seria

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx \mathbf{\underline{1{,}618}033988749895......},$$

e frequentemente, utiliza-se 1,618 como expressão da proporção áurea.

comment